

مقدمه ویرایش جدید



«در یک سمینار رموز موفقیت، سخنران از حضار پرسید: برادران رایت هرگز تسلیم شدند؟ حضار فریاد زدند: نه! نشدند. سخنران پرسید: توماس ادیسون تسلیم شد؟ حضار: نه! نشد. سخنران پرسید: لانس آرمسترانگ تسلیم شد؟ حضار: نه! نشد. سخنران برای چهارمین بار پرسید: مارک راسل تسلیم شد؟ مدتی سکوت در کلاس حاکم شد، سپس یکی از حضار پرسید: مارک راسل دیگر کیست؟ ما تا حالا اسم او را نشنیده‌ایم! سخنران گفت: حق دارید که اسمش را نشنیده باشید، چون تسلیم شد!»

این داستان رو نوشتم که چند تا نکته رو بهت بگم. وقتی هنوز یک سال و اندی تا کنکور باقی مونده و تو مشغول خوندن این کتاب تست هستی، معلوم می‌شه جزو دانش‌آموزای خوب و هدفمند هستی و آرزوی رفتن به دانشگاه‌های بزرگ رو در سر داری. در حالی که خیلی از رقیبای تو، در خواب سنگینی به سر می‌برن و هرچی بهشون می‌گی شروع کن می‌گن کو تا کنکور! هنوز وقت هست! عرب‌ها به ضرب‌المثل دارن که میگه: «شترت را به خدا بسپار ولی افسارش را به درختی ببند.» یعنی امیدت به خدا باشه ولی خودت هم حرکتی، زحمتی، کاری ...
برگردیم سراغ خودت:

بدان و آگاه باش که خوب موقعی شروع کردی و آگه با همین فرمون تا انتها بری و تسلیم نشی، به یاری خدا، بهترین رشته رو توی برترین دانشگاه‌ها قبول می‌شی. دقت کن وضعیت الانت مهم نیست! حتی آگه تا حالا ریاضی رو نفهمیدی و از فرمول‌هاش سردر نیاموردی، به کمک این کتاب به راحتی از پیشش برمی‌ای. یادت باشه تو این مسیر پرفراز و نشیب تا کنکور، خسته می‌شی، می‌بری و از همه بدتر شاید ناامید شی! اما اینو فراموش نکن که هیچ وقت نباید تسلیم ناامیدی بشی! تسلیم شدن رو کلاً از ذهنت پاک کن. برای این‌که بتونی این مسیر رو تا انتها بری، با این کتاب همراهتیم. این کتاب آخرشه! باور کن! بهش اعتماد کن و ریاضیات رو به ما بسپار.

ویژگی‌های این کتاب

- 1 درسنامه‌های جامع و مفهومی داره! هم مطالب کتاب درسی توش هست و هم مطالب عمیق‌تر.
- 2 طبقه‌بندی موضوعی شده، یعنی درسنامه‌های هر فصل به بخش‌های سلولی تقسیم شده تا مجبور نشی کل فصل رو به جا بخونی!
- 3 اصلاً به مطالب خارج از کتاب درسی نپرداخته، موضوعات فضایی (که نه به درد این دنیا می‌خوره، نه به درد اون دنیا) رو تو کتاب راه ندادیم. باور کن برای دعوت هر کدوم از موضوع‌ها به کتابمون، کلی جلسه گذاشتیم و بحث کردیم. خیلی کار سختی بود ولی می‌ارزید.
- 4 توی محدوده مطالب کتاب درسی، عمق مطالب در حد چاه عمیقه، یعنی تهش رو برات درآوردیم. با خیال راحت بخونش و مطمئن باش هیچی جا نمونده.
- 5 هیچ مطلبی رو بدون مثال برات باقی نذاشتیم. همه مثال‌هامون هم از فیلتر استادای عالی و باتجربه گذشتن و بعدش به همشون به طور کامل و آموزشی جواب دادیم.
- 6 پُر از تست‌های دوست‌داشتنیه! تست‌ها رو هم از ساده به سخت چیدیم که اولش با دیدن به تست سخت، سخته نکنی 😊 و از ریاضی فراری نشی.
- 7 همه تست‌های کنکورهای جدید، حتی کنکور امسال! تو کتابمون هست، البته فقط تست‌هایی را آوردیم که مربوط به کتاب جدید.
- 8 پاسخ‌نامه‌ش پُر از راهبردهای عالی! این راهبردها مثل GPS می‌مونن. به کمک اون‌ها، توی حل سؤال گیر نمی‌کنی و می‌دونی که چه مسیری رو باید دنبال کنی. پاسخ‌نامه این کتاب به جز راهبرد، به کلی نکته‌های تستی و تکنیک‌های محاسباتی و... مسلح شده!
- 9 مثل کتاب درسی، تست‌هامون رویکرد مسائل واقعی گرفتن، مثلاً وقتی می‌خوایم فاصله دو نقطه رو بهت یاد بدیم، از فاصله نیمکت بین تو و دوستت استفاده کردیم.

۱۰ تعداد تست‌هاش خیلی زیاده و البته متناسب با اهمیت هر مبحثه! اینقدر که اگه همشون رو کار کنی، به اون مبحث در حد تیم ملی مسلط می‌شی. پُل هالموس می‌گه: تمرین قلب ریاضیات است. اگه اینطوره پس کتاب ما متخصص قلبه! ❤️

ساختار کتاب

حالا چند جمله‌ای هم راجع به ساختار کتاب برات بگم. توی هر درس اگه لازم بوده، مطالب رو به چند بخش تقسیم کردیم و درسنامه و مثال حل‌شده براش آوردیم، ولی مطالب فنی و تکنیکی رو نگه داشتیم واسه حل تست‌های خفن و اون‌ها را تحت عنوان «راهنبرد» توی قسمت پاسخ تشریحی آوردیم. «راهنبردها» برای کسانی که می‌خوان صد بزنی! بعد از درسنامه هر قسمت، تست‌های مربوط به اون قسمت اومده. یه سری تست‌هایی هم اومده به نام برای ۱۰۰٪ واسه اونایی که می‌خوان ۱۰۰٪ بزنی و مخصوص دانش‌آموزان قویه. فصل که تموم میشه یه آزمون جامع از کل فصل برات گذاشتیم تا خودتو محک بزنی. انتهای کتاب پاسخ تشریحی همه تست‌ها اومده و بعدشم پاسخ‌نامه کلیدی و در انتهای کتاب فرمولنامه.

تست‌ها رو براتون دستچین کردیم تا سوال‌های بی‌کیفیت و کم‌کیفیت توی کتاب نباشه. توی پاسخ‌های تشریحی هم تا می‌شده توضیح دادیم، چون می‌دونیم خیلی از شماها به معلم‌های کنکوری خوب دسترسی ندارید تا سوال‌هایی رو که براتون پیش میاد پیرسید. سوالات سخت رو با علامت 🌟 مشخص کردیم. سعی کنید پس از حل سایر تست‌ها سراغ این سوالات بروید.

راهنمای استفاده از کتاب

خب، بذار بگم چطوری از کتاب استفاده کنی! اول درسنامه رو با مثالاش خوب بخون، بعد برو سراغ حل تست‌ها. هر وقت دیدی نمی‌تونی یه سؤال رو حل کنی، برو سراغ پاسخ‌نامه تشریحی، شاید راهنبردی داره که تو بلد نیستی. اگه وقت نداری، تست‌ها رو دو یا چند قسمت کن! مثلاً فقط شماره‌های زوجش رو بزنی. نکته‌هایی رو که یاد می‌گیری حاشیه‌نویسی کن و سعی کن لااقل هر دو هفته یه بار اون‌ها رو دوره کنی. در انتهای فصل یا برای جمع‌بندی می‌تونی از آزمون انتهای فصل استفاده کنی و ببینی توی زمان پیشنهادی می‌تونی چه درصدی بزنی.

و اما قدردانی...

اول! باید از آقای احمد اختیاری مدیر انتشارات تشکر کنم که واقعاً مثل رئیس سازمان استاندارد کشور (!) می‌مونه، یعنی تا کتابی رو به لحاظ محتوایی و ظاهری در حد استانداردهای مهروماه تشخیص نده، اجازه چاپ بهش نمی‌ده، ممنونم که هستی و کیفیت رو بالا نگه می‌دارید.

دوم! باید از آقای محمدحسین انوشه مدیر شورای تألیف تشکر کنم که با توجه به تجربه ۳۰ سالشون در زمینه تألیف، جمع‌بندی بهترین اساتید کشور رو برای نوشتن کتاب دور هم جمع کردن! استادایی مانند آقای نصیر کریمی، دبیر دبیرستان فرزنانگان تهران (تیزهوشان مادر).

سوم! از آقای حسن امین‌ناصری مدیر اجرایی انتشارات که در رفع دغدغه‌های ما تلاش‌های فراوانی نمودند تشکر می‌کنم. و در آخر از استادم جناب آقای بهمن اصلاح‌پذیر - که به حق یکی از بزرگ مردان آموزش ریاضی کشور هستند - به خاطر هم‌فکری‌ها و جلسات متعددی که با دبیران و مؤلفان ترتیب دادند و در حقیقت هدایت علمی کتاب رو به عهده داشتند و از استاد گرانقدر جناب آقای هوشنگ نظری - از باسابقه‌ترین دبیران کشور - که ریزبینانه کتاب رو بررسی کردند و پیشنهادهای سازنده‌ای رو دادند. این کتاب مرهون زحمات و تلاش‌های این دوستان است:

سرکار خانم زهرا رسولی مسئول ویراستاری کتاب و آقای مهدی مرادی و خانم‌ها سیده مریم حسینی و سارا اسدی ویراستاران کتاب جناب آقای محسن فرهادی مدیرگروه هنری و تیم حرفه‌ایشون آقایان حسین شیرمحمدی، تایماز کاویانی و حسام طلایی سرکار خانم مریم تاجداری مدیرتولید و تمام عزیزانی که در زمینه تولید کتاب همراهی کردند، به خصوص سرکار خانم رویا طبسی و الهام عربی صفحه‌آرهای محترم کتاب

جناب آقای امیر انوشه مدیریت سایت و همکاران روابط عمومی، بابت همکاری‌های صمیمانه‌شون.

از تمام صاحب‌نظران، استادان و خوانندگان عزیز صمیمانه درخواست می‌کنیم که این مجموعه را از نقد و نظر خود محروم نسازند. خواهشمند است نظرات خود را از طریق اینستاگرام به آیدی مقابل ارسال نمایند. @ashrafii.official

مدیر پروژه و ناظر علمی

عباس اشرفی

استادان مشاور به سرپرستی آقای محمد گودرزی که از نظرات ارزنده آن‌ها در ویرایش جدید کتاب استفاده نموده‌ایم:

۱. محمود امیری ۲. محمدرضا بیگی ۳. جهانبخش نیکنام

فهرست

فصل اول هندسه تحلیلی و جبر

۷

فصل دوم هندسه

۳۷

فصل سوم تابع

۶۹

فصل چهارم مثلثات

۱۰۳

فصل پنجم توابع نمایی و لگاریتمی

۱۲۹

فصل ششم حد و پیوستگی

۱۵۱

فصل هفتم آمار و احتمال

۱۷۵

پاسخنامه تشریحی

۱۹۵

پاسخنامه کلیدی

۳۲۳

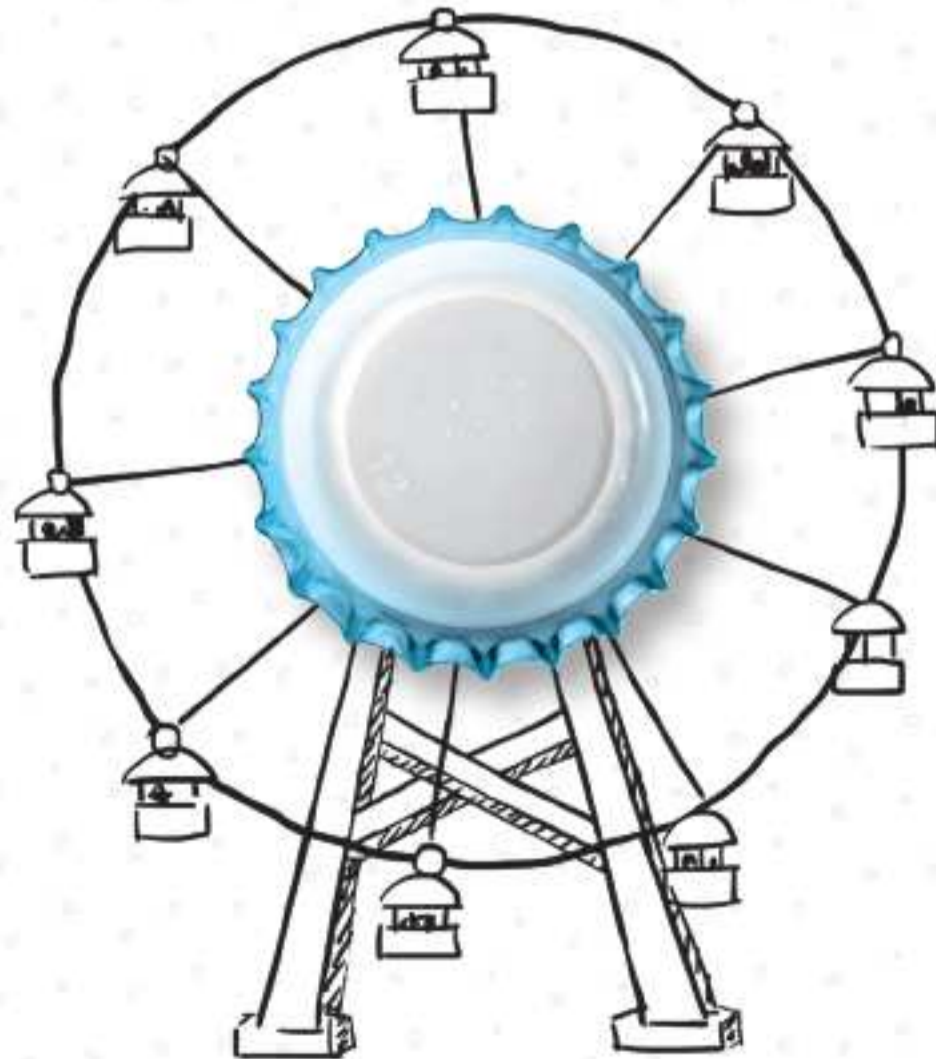
فرمولنامه

۳۲۹

مثلثات

موضوع این فصل مثلثاته که بخش جدایی ناپذیر ریاضیاته! آگه به سؤال‌های کنکورهای چند سال اخیر یه نگاهی بندازی، متوجه می‌شی که از این فصل نمی‌شه گذشت و باید باهاش کنار بیای! این فصل بارادیان و آشنایی با واحدهای اندازه‌گیری شروع می‌شه و بعد با نسبت‌های مثلثاتی متمم، مکمل و... ادامه پیدا می‌کنه. این درس خیلی مهمه!

یادت بمونه برای تمرین‌های آخر فصل وقت زیادی بذاری، چون تمرین‌های سرنوشت‌سازیه!



سؤالات چهارگزینه‌ای

۴۷۲. طول کمان مقابل به زاویه ۶۰ درجه، $2\sqrt{3}\pi$ سانتی‌متر است. طول شعاع دایره چند سانتی‌متر است؟

- (۱) $4\sqrt{3}$ (۲) $4\sqrt{2}$ (۳) $6\sqrt{2}$ (۴) $6\sqrt{3}$

(مقتضای تمرین کتاب درسی)

۴۷۳. اندازه زاویه مکمل زاویه‌ای با اندازه $\frac{5\pi}{8}$ رادیان برابر چند درجه است؟

- (۱) $66/5$ (۲) $67/5$ (۳) $68/5$ (۴) $69/5$

(مقتضای تمرین کتاب درسی)

۴۷۴. اندازه زاویه‌ای بر حسب درجه -315 است. اندازه زاویه بر حسب رادیان کدام است؟

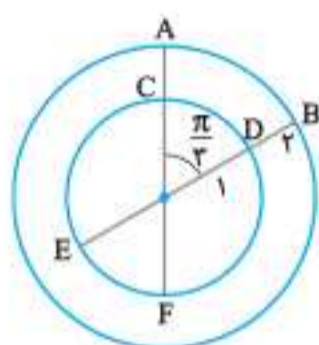
- (۱) $-\frac{8\pi}{5}$ (۲) $-\frac{7\pi}{5}$ (۳) $-\frac{7\pi}{4}$ (۴) $-\frac{8\pi}{7}$

۴۷۵. در دایره‌ای به شعاع ۱۰ واحد، کمانی به طول ۷ واحد جدا شده است. اندازه این کمان تقریباً چند درجه است؟

- (۱) $39/8$ (۲) $40/1$ (۳) $42/3$ (۴) $43/2$

۴۷۶. با توجه به شکل مقابل، اختلاف طول کمان AB از کمان EF تقریباً کدام است؟

- (۱) $2/1$ (۲) $2/3$ (۳) $2/6$ (۴) $2/8$



۴۷۷. اگر زاویه بین ساق و قاعده مثلث متساوی‌الساقینی α رادیان و اندازه قاعده این مثلث از اندازه ساق‌های آن بزرگ‌تر باشد، حدود α کدام است؟

- (۱) $\frac{2\pi}{3} < \alpha < \pi$ (۲) $\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ (۳) $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{2\pi}{3}$ (۴) $0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$

۴۷۸. اندازه دو زاویه مثلثی بر حسب رادیان به ترتیب $\frac{2\pi}{5}$ و $\frac{\pi}{8}$ است. اندازه زاویه سوم بر حسب درجه کدام است؟

- (۱) $85/5$ (۲) 85 (۳) $80/5$ (۴) 80

۴۷۹. زاویه‌های با اندازه 45° و $\frac{\pi}{5}$ رادیان و α رادیان متعلق به سه رأس مثلثی هستند. زاویه مرکزی α در دایره‌ای به شعاع ۱۰۰ واحد با فرض $\pi = 3$ ، کمانی با کدام طول جدا می‌کند؟

- (۱) 155 (۲) 145 (۳) 135 (۴) 165

۴۸۰. مطابق شکل ماهواره‌ای در فاصله ۲۰۰ کیلومتری سطح کره زمین در حال حرکت است. اگر شعاع کره زمین ۶۴۰۰ کیلومتر باشد و این ماهواره 2° نسبت به مرکز کره زمین حرکت کند، طول مسیری که ماهواره طی می‌کند، کدام است؟ ($\pi \approx 3$)



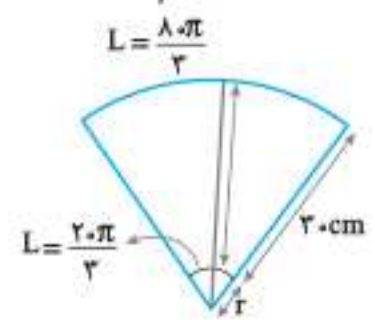
- (۱) $255 \cdot \text{km}$ (۲) $265 \cdot \text{km}$ (۳) $275 \cdot \text{km}$ (۴) $285 \cdot \text{km}$

۴۸۱. طول برف‌پاک‌کن عقب اتومبیلی ۲۴ سانتی‌متر است. برف‌پاک‌کن کمانی به اندازه 12° طی می‌کند. طول کمان طی شده حدوداً چند سانتی‌متر است؟



- (۱) 48 (۲) 50 (۳) 52 (۴) 54

۴۸۲. مطابق شکل، اگر طول تیغه برف‌پاک‌کن عقب اتومبیلی ۲۰ cm باشد و قسمت ابتدای تیغه برف‌پاک‌کن کمانی به طول $\frac{2\pi}{3}$ و قسمت



انتهای برف‌پاک‌کن کمانی به طول $\frac{8\pi}{3}$ را طی می‌کنند. اندازه r چند سانتی‌متر است؟

- (۱) 10 (۲) 5 (۳) 12 (۴) 7



Lim



۵-۵. اگر $\tan 22^\circ = 0.4$ باشد، حاصل $\frac{\sin(-112^\circ) + \sin 158^\circ}{\cos 56^\circ}$ کدام است؟

- (۱) ۰/۶
- (۲) ۱/۵
- (۳) ۰/۵
- (۴) ۰/۴

۵-۶. اگر $\tan \frac{\pi}{10} = 0.2$ باشد، مقدار $\frac{2 \cos \frac{21\pi}{10} - \sin \frac{9\pi}{10}}{\sin \frac{29\pi}{10} + \sin \frac{4\pi}{10}}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{18}$
- (۲) $-\frac{4}{9}$
- (۳) $\frac{6}{11}$
- (۴) $-\frac{11}{4}$

۵-۷. اگر $\Delta x = \frac{\pi}{2}$ باشد، حاصل $\frac{\sin 2x \cdot \tan 2x}{\tan 7x \cdot \cos 2x}$ کدام است؟

- (۱) -۱
- (۲) ۱
- (۳) صفر
- (۴) $\frac{1}{2}$

۵-۸. اگر $x - y = \frac{2\pi}{3}$ باشد، حاصل $\frac{\sin x + 2 \cos y}{\cos x + 2 \sin y}$ کدام است؟

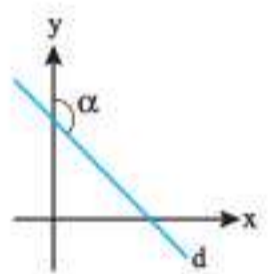
- (۱) $2 \tan y$
- (۲) $\frac{1}{3} \tan y$
- (۳) $2 \cot y$
- (۴) $\frac{1}{3} \cot y$

۵-۹. مقدار عددی عبارت $P(\alpha) = \sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \sin 4\alpha + \sin 5\alpha$ به ازای $\alpha = \frac{\pi}{6}$ کدام است؟

- (۱) ۱
- (۲) $1 + \sqrt{3}$
- (۳) $2 + \sqrt{3}$
- (۴) صفر

۵-۱۰. اگر معادله خط d به صورت $y = -\frac{4}{3}x + 2$ باشد، مقدار $\sin \alpha$ کدام گزینه است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$
- (۲) $\frac{3}{5}$
- (۳) $\frac{4}{5}$
- (۴) $\frac{3}{4}$



۵-۱۱. اگر انتهای کمان α در ربع دوم دایره مثلثاتی باشد و $\sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$ ، مقدار $\tan(\frac{21\pi}{6} + \alpha)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{18}}{3}$
- (۲) $-\frac{\sqrt{18}}{6}$
- (۳) $-\frac{\sqrt{18}}{3}$
- (۴) $\frac{\sqrt{18}}{6}$

۵-۱۲. اگر \hat{A} ، \hat{B} و \hat{C} زوایای مثلث ABC باشند، کدام گزینه همواره درست است؟

- (۱) $\sin(\hat{A} + \hat{B}) = \cos \hat{C}$
- (۲) $\sin(\frac{\hat{B} + \hat{C}}{2}) = \sin(\frac{\hat{A}}{2})$
- (۳) $\sin(2\hat{A} + 2\hat{B}) + \sin(2\hat{C}) = 0$
- (۴) $\cos(\hat{A} + \hat{B}) = \cos \hat{C}$

(مطابقت تمرین کتاب درسی)

۵-۱۳. تساوی $\tan(x + \frac{\pi}{18}) = \cot(\frac{2\pi}{9} + x)$ به ازای کدام مقدار x می تواند برقرار باشد؟

- (۱) $\frac{\pi}{9}$
- (۲) $\frac{\pi}{18}$
- (۳) $\frac{2\pi}{9}$
- (۴) $\frac{5\pi}{18}$

۵-۱۴. اگر $\cos(\frac{5\pi}{4} - x) - 2 \cos(x - 2\pi) = 0$ باشد، مقدار $\cos(\frac{11\pi}{4} + x)$ کدام می تواند باشد؟

- (۱) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$
- (۲) $-\frac{\sqrt{5}}{10}$
- (۳) -۲
- (۴) $-\frac{1}{2}$

۵-۱۵. حاصل عبارت $A = \tan(\pi + \alpha) + \frac{\sin(\pi + \alpha) - 4 \sin(4\pi + \alpha)}{2 \cos(\pi + \alpha) + 2 \cos(8\pi + \alpha)}$ چند برابر $\tan \alpha$ است؟

- (۱) ۲
- (۲) -۲
- (۳) ۳
- (۴) -۳

۵-۱۶. اگر $\frac{\sin 25^\circ - \cos 28^\circ}{\sin 46^\circ - 2 \cos 52^\circ} = -\frac{2}{25}$ باشد، آن گاه $\tan 1^\circ$ کدام است؟

- (۱) ۰/۱۸
- (۲) ۰/۱۶
- (۳) ۰/۱۴
- (۴) ۰/۲۰

۵-۱۷. اگر $P(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{6}}{2})$ و زاویه بین نیم خط OP و محور Ox در جهت مثلثاتی باشد، حاصل عبارت $\frac{\sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) - \sin(\alpha - \pi)}{|\tan^2 \alpha - 1|}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{-\sqrt{6} + \sqrt{3}}{2}$
- (۲) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{3}}{2}$
- (۳) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{3}}{3}$
- (۴) $\frac{-\sqrt{6} + \sqrt{3}}{3}$

۵-۱۸. اگر کمان α در ناحیه سوم دایره مثلثاتی و $\tan \alpha = 2/4$ باشد، حاصل $\frac{\tan(-\frac{12\pi}{3} - \alpha) \times \sin(-7\pi - \alpha)}{\cos(\frac{15\pi}{4} + \alpha) + \tan(-\alpha)}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{5}{18}$
- (۲) $-\frac{25}{216}$
- (۳) $\frac{25}{216}$
- (۴) $\frac{5}{18}$



۵۱۹. اگر $\tan 27^\circ = \frac{2}{f}$ باشد، حاصل عبارت $\frac{\sin 102^\circ + \tan 57^\circ - \sin 167^\circ}{\tan^2(-95^\circ) - \cos(-84^\circ)}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{125}{428}$ (۲) $\frac{279}{428}$ (۳) $\frac{125}{212}$ (۴) $\frac{279}{212}$

۵۲۰. اگر $\frac{2 \cot x + \tan \frac{4\pi}{3}}{\cot x + \tan \frac{5\pi}{3}} = 2$ باشد، مقدار $\sin(\frac{25\pi}{6}) + \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} \cos x$ کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $-\frac{9}{2}$ (۳) $\frac{9}{2}$ (۴) $-\frac{2}{3}$

۵۲۱. اگر $\tan \theta = \sqrt{5a^2 + 2}$ و $\cos \theta = \frac{1}{a-2}$ باشد، مقدار عبارت $A = 5 \sin(\frac{7\pi - 2\theta}{2}) + \cos(\theta - 7\pi) + 2 \cos(\frac{2\pi + 2\theta}{2})$ کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) $2(1 - \sqrt{2})$ (۲) $2(1 - \sqrt{3})$ (۳) $2(1 + \sqrt{2})$ (۴) $2(1 + \sqrt{3})$

۵۲۲. حاصل عبارت $\sin \frac{\pi}{9} + \sin \frac{2\pi}{9} + \sin \frac{4\pi}{9} + \cos \frac{11\pi}{18} + \cos \frac{13\pi}{18} + \cos \frac{17\pi}{18}$ کدام است؟

- (۱) -1 (۲) 1 (۳) 2 (۴) صفر

۵۲۳. مجموع مربعات چهار عدد $\cos \frac{\pi}{12}$ ، $\cos \frac{5\pi}{12}$ ، $\cos \frac{7\pi}{12}$ و $\cos \frac{11\pi}{12}$ برابر است با:

- (۱) 1 (۲) 2 (۳) 3 (۴) 4

۵۲۴. اگر α و β دو زاویه حاده و $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ باشد، حاصل $\tan(\alpha + \beta) \cdot \tan(2\alpha + 2\beta) + \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}$ کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{2}$ (۲) 2 (۳) -2 (۴) $-2\sqrt{2}$

۵۲۵. اگر $A = \frac{1}{1 + \cot^2 \frac{\pi}{5}} + \frac{1}{1 + \cot^2 \frac{2\pi}{5}} + \frac{1}{1 + \cot^2 \frac{3\pi}{5}}$ و $B = \frac{1}{1 + \cot^2 \frac{\pi}{14}} + \frac{1}{1 + \cot^2 \frac{2\pi}{14}} + \frac{1}{1 + \cot^2 \frac{3\pi}{14}}$ باشد، چه رابطه‌ای

بین A و B برقرار است؟

- (۱) $B = A + 1$ (۲) $2 - A = B$ (۳) $A = B$ (۴) $A = 2 + B$

۵۲۶. حاصل $\frac{1}{1 + \tan 15^\circ} + \frac{1}{1 + \tan 16^\circ} + \dots + \frac{1}{1 + \tan 75^\circ}$ کدام است؟

- (۱) 20 (۲) $20/5$ (۳) 21 (۴) $21/5$

۵۲۷. حاصل عبارت $\sin(\frac{17\pi}{3}) \cos(-\frac{17\pi}{6}) + \tan(\frac{19\pi}{4}) \sin(-\frac{11\pi}{6})$ کدام است؟ (تجربی ۹۸)

- (۱) $-\frac{1}{4}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۵۲۸. اگر $\tan \alpha = \frac{4}{3}$ و انتهای کمان α در ربع سوم باشد، حاصل عبارت زیر کدام است؟ (تجربی خارج ۹۸)

$$\sin(\frac{9\pi}{4} + \alpha) \cos(\frac{7\pi}{4} - \alpha) - \tan(\alpha - \frac{2\pi}{4})$$

- (۱) $-1/22$ (۲) $-0/52$ (۳) $0/27$ (۴) $0/48$

۵۲۹. حاصل $\tan(20^\circ) \cos(21^\circ) + \tan(48^\circ) \sin(84^\circ)$ کدام است؟ (اعداد داده‌شده بر حسب درجه هستند). (تجربی ۹۹)

- (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) صفر (۳) 1 (۴) 2

۵۳۰. حاصل عبارت $\tan(285^\circ) \tan(-165^\circ) - \sin(105^\circ) \cos(255^\circ)$ کدام است؟ (اعداد داده‌شده بر حسب درجه هستند). (تجربی خارج ۹۹)

- (۱) $\sin^2(15^\circ)$ (۲) $\cos^2(15^\circ)$ (۳) $-\sin^2(15^\circ)$ (۴) $-\cos^2(15^\circ)$

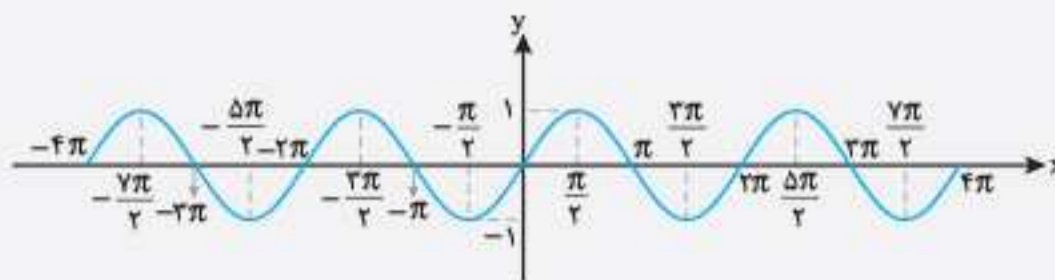
۵۳۱. حاصل عبارت $\tan \frac{11\pi}{4} + \sin \frac{15\pi}{4} \cos \frac{12\pi}{4}$ کدام است؟ (ریاضی ۹۸)

- (۱) $-\frac{3}{2}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{3}{2}$

با توجه به آنچه در درس گذشته گفتیم، به ازای $\sin(x \pm 2k\pi) = \sin x, k \in \mathbb{Z}$ می‌توان نتیجه گرفت نمودار تابع سینوس در بازه‌های $[0, 2\pi], [2\pi, 4\pi], \dots$ و همین‌طور در بازه‌های $[0, 2\pi], [-2\pi, 0], [-4\pi, -2\pi], \dots$ یکسان است.

به‌طور کلی می‌توان گفت نمودار تابع سینوس روی هر بازه $[2k\pi, 2k\pi + 2\pi]$ مانند نمودار تابع روی بازه $[0, 2\pi]$ است. دقت کنید منظور از $2k\pi$ با شرط $k \in \mathbb{Z}$ همه مضارب π مانند $0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$ است و منظور از بازه‌های $[2k\pi, 2k\pi + 2\pi]$ بازه‌هایی مانند $[0, 2\pi], [2\pi, 4\pi], [4\pi, 6\pi], \dots$ است.

با توجه به آنچه گفتیم، نمودار تابع $y = \sin x$ روی دامنه کلی آن (\mathbb{R}) به شکل زیر است:

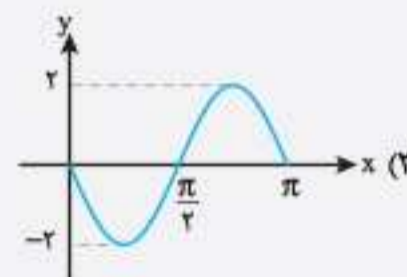
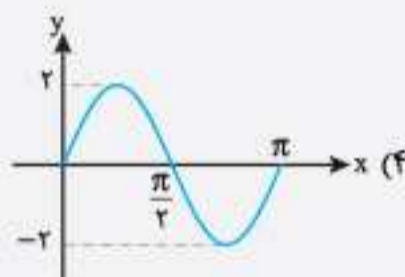
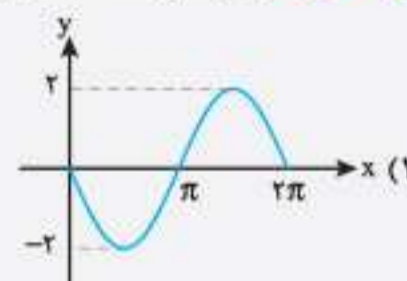
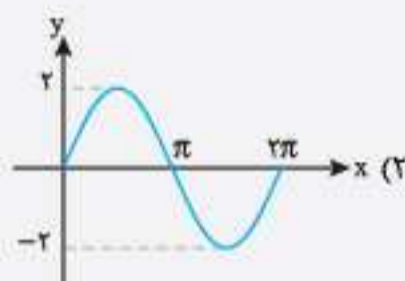


ویژگی‌های نمودار تابع $y = \sin x$

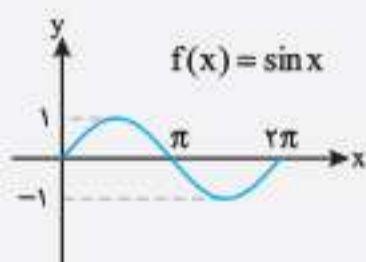
- ❶ دامنه تابع سینوس \mathbb{R} و برد آن بازه $[-1, 1]$ است.
- ❷ مقدار تابع سینوس در طول‌های مضارب π رادیان (یعنی $k\pi$ به شرط $k \in \mathbb{Z}$) برابر صفر است.
- ❸ در نقاطی به طول‌های $\{ \dots, -\frac{7\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \dots \}$ یعنی مضارب فرد $\frac{\pi}{2}$ $(x = (2k+1)\frac{\pi}{2})$ به حداکثر مقدارش (۱) یا حداقل مقدارش (-۱) می‌رسد.
- ❹ در نقاط $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ مانند $\{ \dots, -\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots \}$ تابع به حداکثر مقدار خود یعنی ۱ می‌رسد. $(k \in \mathbb{Z})$
- ❺ در نقاط $x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$ مانند $\{ \dots, -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \dots \}$ تابع به حداقل مقدار خود یعنی -۱ می‌رسد. $(k \in \mathbb{Z})$

مثال: نمودار تابع $y = 2\sin x$ به کدام شکل است؟

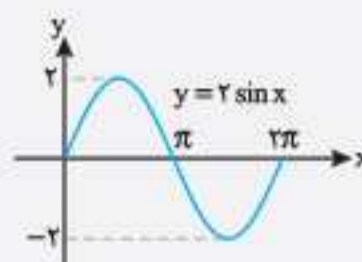
(مشابه تمرین کتاب درسی)



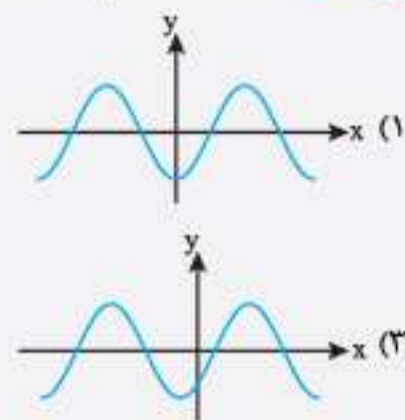
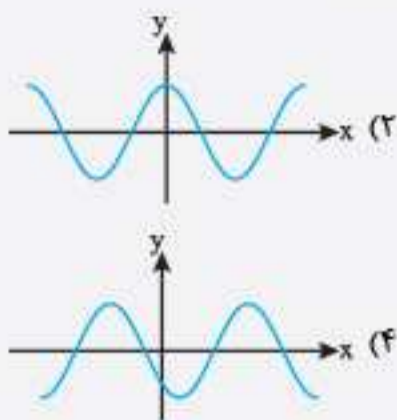
پاسخ: نمودار تابع $f(x) = \sin x$ را روی بازه $[0, 2\pi]$ رسم می‌کنیم و با دو برابر کردن عرض‌های نقطه‌های نمودار، می‌توانیم به نمودار تابع $y = 2\sin x$ برسیم.



⇒

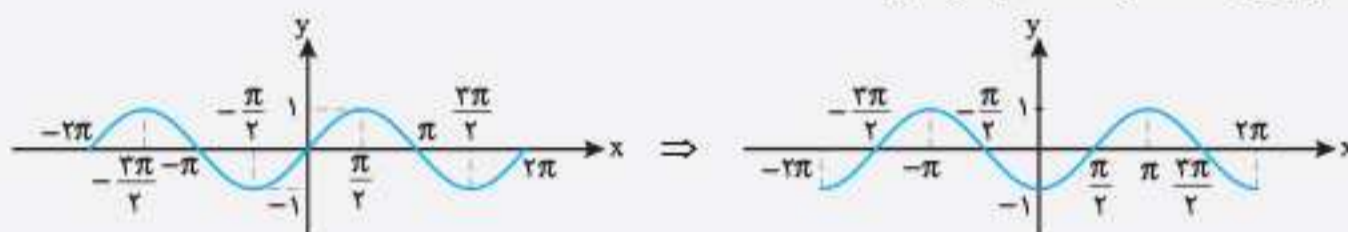


مثان: نمودار تابع $f(x) = \sin(x - \frac{\pi}{4})$ به کدام شکل زیر است؟



پاسخ: 1 2 3 4

نمودار تابع $y = \sin x$ را به طور کلی رسم می‌کنیم. از آن جایی که از x به اندازه $\frac{\pi}{4}$ رادیان کم شده است، نمودار تابع $f(x)$ را به اندازه $\frac{\pi}{4}$ رادیان به سمت راست انتقال می‌دهیم.



نمودار تابع کسینوس

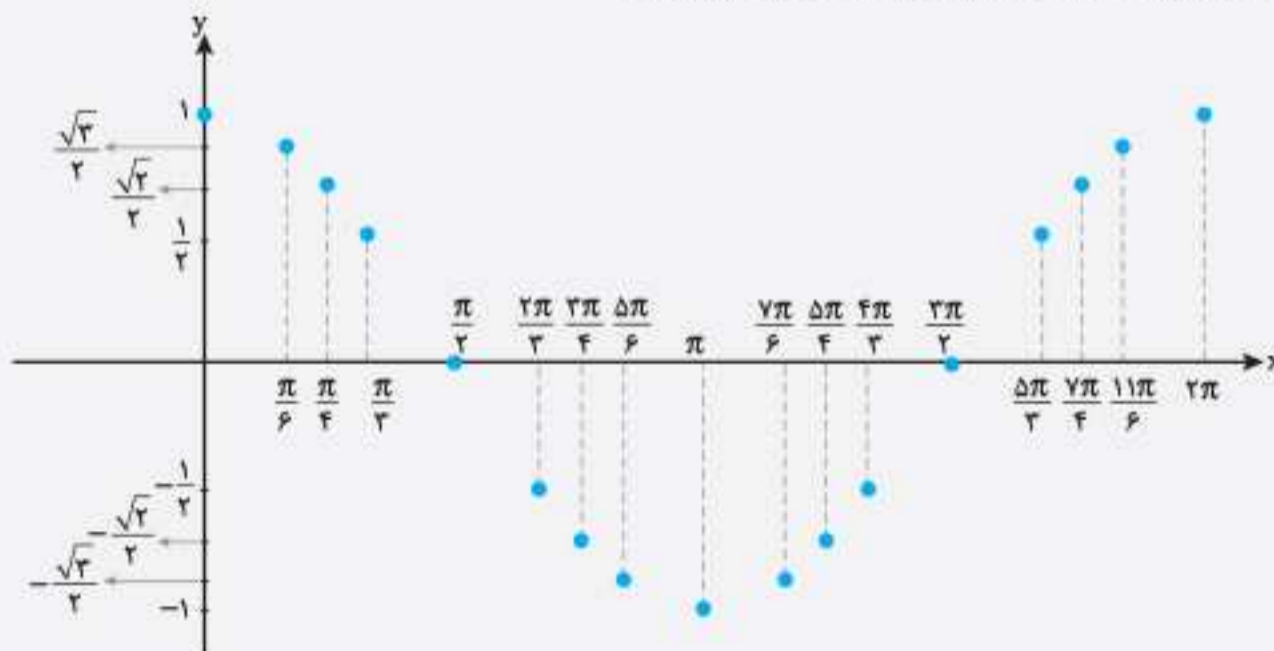
مقدارهای کسینوس را در نقاطی به طول‌های $\{0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \dots\}$ مطابق جدول زیر می‌یابیم. در بازه $[0, \pi]$ جدول مقدارهای کسینوس به شکل زیر است:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
y	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

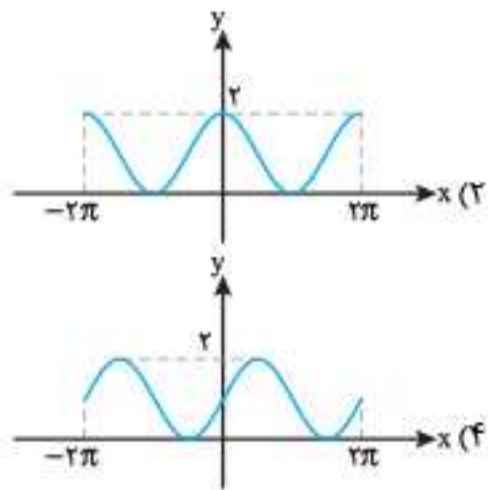
در بازه $[\pi, 2\pi]$ جدول مقدارهای کسینوس به شکل زیر است:

x	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
y	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

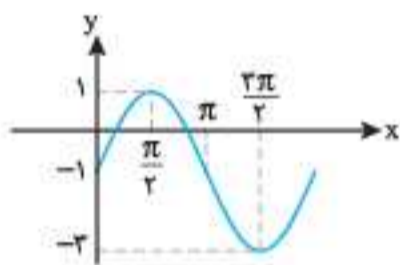
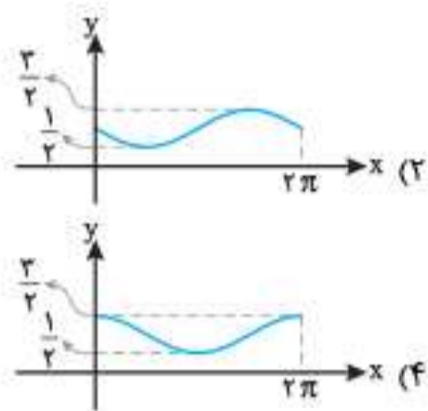
این نقاط مهم را روی یک دستگاه محورهای مختصات رسم می‌کنیم.



(مقایسه تمرین کتاب درسی)



(مقایسه تمرین کتاب درسی)



۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

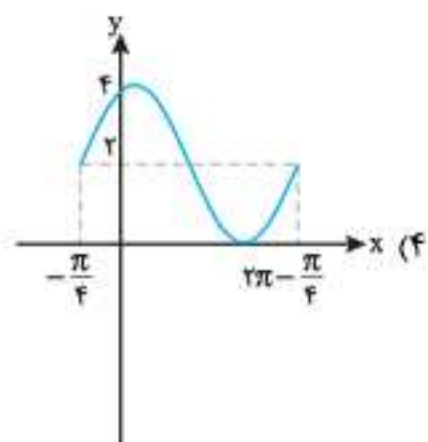
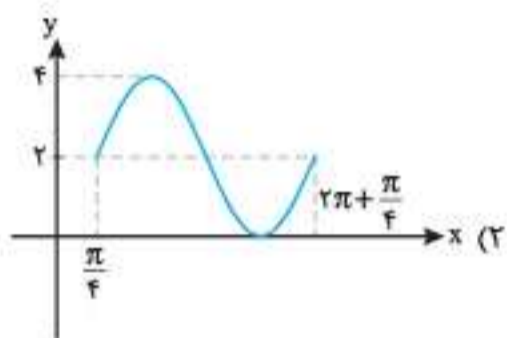
$[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$ (۴)

$[\frac{7\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}]$ (۳)

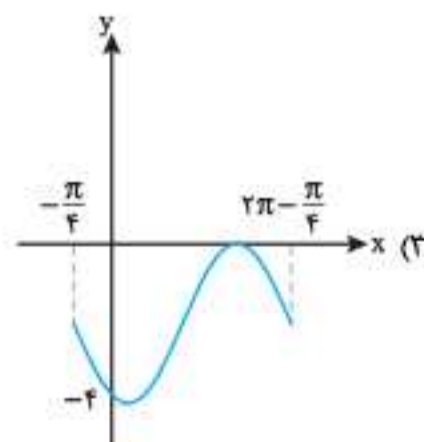
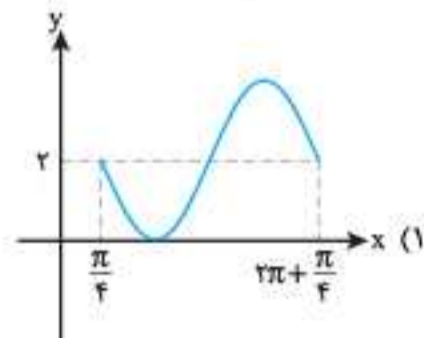
$[\frac{2\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}]$ (۲)

$[0, \pi]$ (۱)

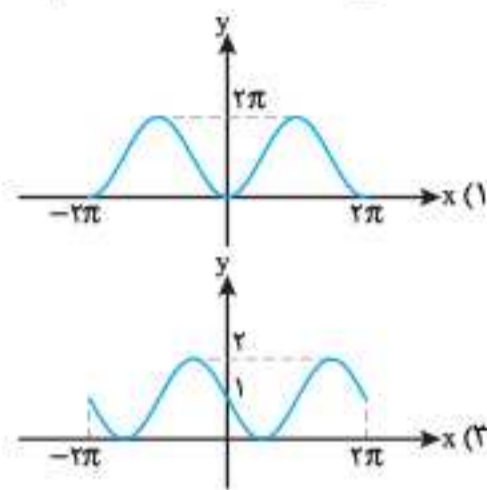
(مقایسه تمرین کتاب درسی)



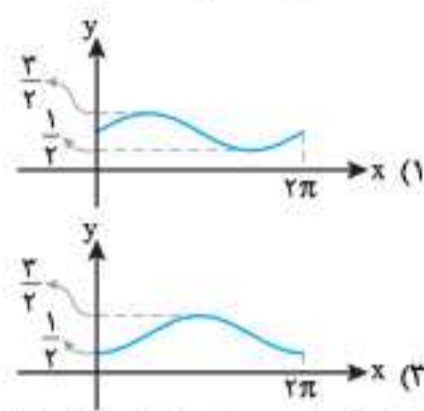
۵۳۹. نمودار تابع $f(x) = 2 + 2\sin(x - \frac{\pi}{4})$ کدام شکل است؟



۵۳۴. نمودار تابع $f(x) = 1 - \sin x$ به کدام شکل است؟



۵۳۵. نمودار تابع $f(x) = 1 - \frac{1}{4}\sin x$ به کدام شکل است؟



۵۳۶. ضابطه نظیر نمودار شکل مقابل کدام است؟

$y = 2\cos x + 1$ (۱)

$y = \sin x - 2$ (۲)

$y = 2\sin x - 1$ (۳)

$y = 2 - \cos x$ (۴)

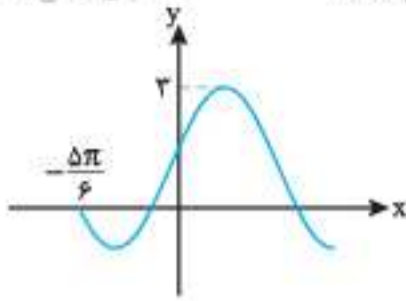
۵۳۷. نمودار تابع $y = \delta \cos x$ در بازه $[-4\pi, 2\pi]$ در چند نقطه به حداکثر مقدار خود می‌رسد؟

۵۳۸. تابع $y = \cos(x - \frac{\pi}{4})$ در کدام یک از بازه‌های زیر، یک‌به‌یک است؟



۵۵۳. شکل زیر قسمتی از نمودار تابع با ضابطه $y = a + b \cos(\frac{\pi}{5} - x)$ است. مقدار تابع در $x = \frac{\pi}{6}$ کدام است؟

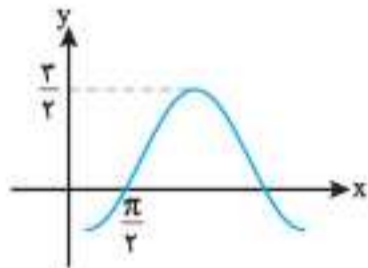
(تجربی خارج ۹۸)



- ۱/۵ (۱)
- ۲ (۲)
- ۲/۵ (۳)
- $1 + \sqrt{3}$ (۴)

۵۵۴. شکل زیر قسمتی از نمودار تابع با ضابطه $y = a + b \sin(x + \frac{\pi}{3})$ است. مقدار a کدام است؟

(تجربی خارج ۹۹)



- ۱ (۱)
- $-\frac{1}{2}$ (۲)
- $\frac{1}{2}$ (۳)
- ۱ (۴)

برای ۱۰۰ درصد



۵۵۵. اگر $\sin 2x = \frac{m-1}{2}$ و $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{12}$ باشد، حدود m کدام است؟

- $[\frac{2}{5}, 4]$ (۱)
- $[-\frac{1}{5}, 4]$ (۲)
- $[0, 5, 2]$ (۳)
- $[\frac{2}{5}, 3]$ (۴)

۵۵۶. با فرض این که $x \neq k\pi; k \in \mathbb{Z}$ ، تساوی $\cot^2 x + \cot^2 x = \frac{a}{\sin^2 x} + \frac{b}{\sin^2 x}$ به ازای کدام مقادیر a و b برقرار است؟

- $a = -1, b = 1$ (۱)
- $a = 1, b = -1$ (۲)
- $a = 2, b = -2$ (۳)
- $a = -2, b = 2$ (۴)

۵۵۷. به ازای کدام مقدار m ، تساوی $\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{m}{\cos^2 x} = \tan^2 x - 1$ یک اتحاد است؟

- ۱ (۱)
- ۲ (۲)
- ۱ (۳)
- ۲ (۴)

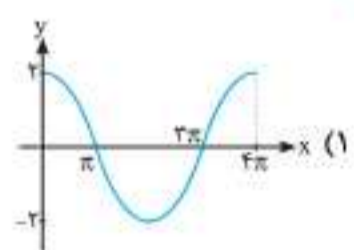
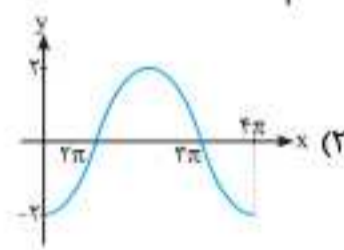
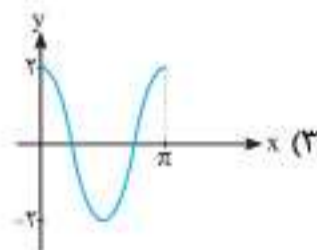
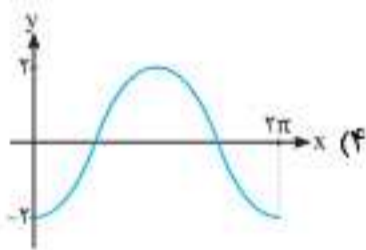
۵۵۸. اگر انتهای کمان θ در ناحیه اول مثلثاتی و $\cos \theta = A$ باشد، حاصل عبارت $\sqrt{1 + \tan^2 \theta} + \sqrt{1 + 2 \sin \theta \cdot \cos \theta} - \sin \theta$ کدام است؟

- $\frac{A^2 + 1}{A}$ (۱)
- $2A$ (۲)
- $\frac{1 - A^2}{A}$ (۳)
- $2\sqrt{1 - A^2}$ (۴)

۵۵۹. در مثلث قائم الزاویه ABC ، حاصل $\frac{\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C}{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C}$ برابر است با:

- ۲ (۱)
- $\frac{1}{2}$ (۲)
- ۱ (۳)
- ۴ (۴)

۵۶۰. کدام شکل قسمتی از نمودار تابع $f(x) = 2 \cos(-\frac{x}{3})$ است؟

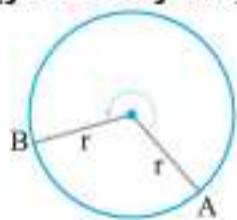


مدت زمان پیشنهادی: ۲۵ دقیقه

آزمون پایانی فصل چهارم



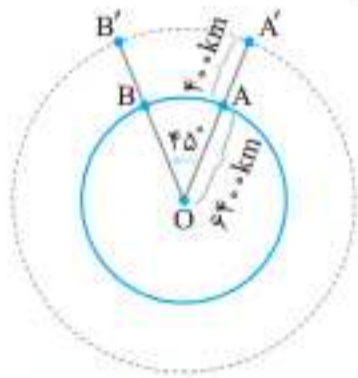
۱. نخى را به اندازه ۲ برابر شعاع دایره‌ای بریده‌ایم و آن را از نقطه A روی محیط دایره قرار می‌دهیم تا نقطه B حاصل شود. اندازه $\angle AOB$ تقریباً چند درجه است؟



- 61° (۱)
- 91° (۲)
- 151° (۳)
- 171° (۴)

۲. مکان کدام زاویه روی دایره مثلثاتی با بقیه متفاوت است؟

- (۱) $\frac{10\pi}{3}$ (۲) $\frac{22\pi}{3}$ (۳) $\frac{24\pi}{3}$ (۴) $\frac{7\pi}{3}$



۳. ایستگاه فضایی بین‌المللی (A') را مطابق شکل در نظر بگیرید که در فاصله تقریبی ۴۰۰ کیلومتری بالای سطح کره زمین قرار دارد. اگر این ایستگاه زمینی از نقطه A تا نقطه B که با مرکز زمین زاویه ۴۵° می‌سازد، رصد شود، این ایستگاه چه مقدار مسافت تقریبی را در مدار خود از A' تا B' پوشش می‌دهد؟ (شعاع تقریبی کره زمین را ۶۴۰۰ کیلومتر فرض کنید.)

- (۱) ۵۳۳۸ (۲) ۶۳۴۰ (۳) ۶۴۰۰ (۴) ۶۸۰۰

۴. کدام ردیف از جدول زیر، اطلاعات اشتباهی را در بردارد؟

ردیف	ربع / نسبت مثلثاتی	اول $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$	دوم $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$	سوم $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$	چهارم $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$
۱	$\sin \alpha$	+	+	-	-
۲	$\cos \alpha$	+	-	-	+
۳	$\tan \alpha$	+	+	+	-
۴	$\cot \alpha$	+	-	+	-

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

۵. حاصل عبارت مقابل برابر کدام گزینه است؟

$$\left(\frac{1}{1-\sin^2 \alpha} - 1\right) \left(\frac{1}{1-\cos^2 \alpha} - 1\right)$$

(۴) تعریف نشده

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۶. ساده شده عبارت مقابل کدام است؟

$$\frac{\tan^2\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cot^2\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)} + \cos^2(75^\circ) + \cos^2(15^\circ)$$

- (۱) $\frac{19}{9}$ (۲) $\frac{9}{19}$ (۳) $\frac{90}{19}$ (۴) $\frac{9}{91}$

۷. چند مورد از مطالب زیر درست است؟

- (الف) تمامی نسبت‌های مثلثاتی در ربع دوم منفی هستند. (ب) سینوس دو زاویه که با هم متمم هستند، برابرند. (پ) نسبت مثلثاتی تانژانت برای دو زاویه مکمل، یکسان است. (ت) کسینوس دو زاویه که قرینه یکدیگرند، برابر است.

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

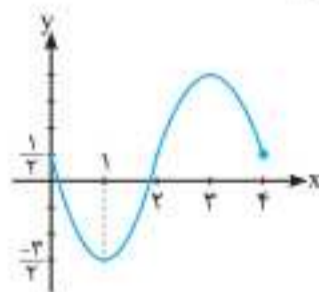
۸. با توجه به تساوی $\frac{2\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha + 2\cos \alpha} = P$ ، مقدار $\tan \alpha$ برابر است با:

- (۱) $\frac{1-P}{1-2P}$ (۲) $\frac{P-2}{1-2P}$ (۳) $\frac{1-2P}{P-2}$ (۴) ۱

۹. کدام گزینه مقدار $\sin 146^\circ$ را نشان نمی‌دهد؟

- (۱) $\sin 52^\circ$ (۲) $\cos 79^\circ$ (۳) $\cos 47^\circ$ (۴) $\cos 29^\circ$

۱۰. نمودار تابع $f(x) = a \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) + c$ در یک دوره تناوب رسم شده است. حاصل ac کدام است؟



- (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) -۲

۱۱. با رسم نمودار تابع $-2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$ تعیین کنید تابع در بازه $[\pi, 2\pi]$ به ترتیب چند ماکزیمم و چند مینیمم دارد؟

- (۱) ۱, ۲ (۲) ۲, ۱ (۳) ۱, ۳ (۴) ۳, ۱

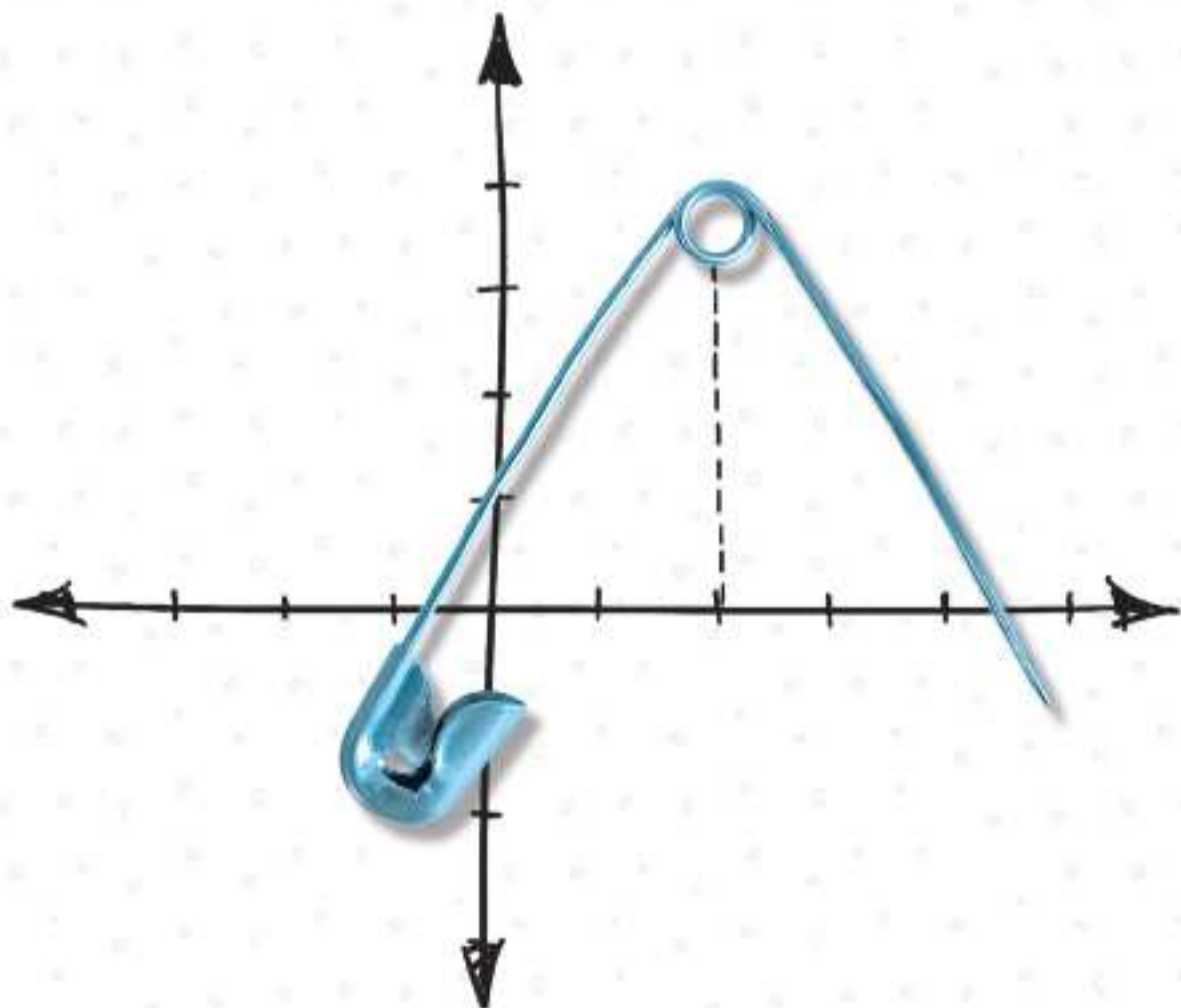
۱۲. تعیین کنید تابع $f(x) = \sin x + \frac{\pi}{4}$ در کدام یک از بازه‌های زیر صعودی است؟

- (۱) $\left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$ (۲) $\left[\pi, \frac{3\pi}{4}\right]$ (۳) $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ (۴) $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

حد و پیوستگی

این فصل می‌خواهد به تو یاد بدهد که فقط مقدار تابع در یک نقطه نیست که مهمه! بلکه رفتار تابع در اطراف اون نقطه هم مهمه. همین‌طور به شما یاد می‌دهد که نسبت اعداد خیلی کوچولو رو به هم محاسبه کنی. آخرین مطلبی هم که توی این فصل گنجوندن، مفهوم پیوستگیه، یعنی باید یادگیری که منحنی تو چه نقطه‌هایی پیوسته‌اس و کجاها سوراخ شده یا کنده شده!

درک مفهوم این فصل، خیلی در فهم مطالب بعدی ریاضی مثل مشتق کمک می‌کنه. ما توی این فصل، برای اولین بار در ایران منحنی رو بردیم زیر ذره‌بین تا بهتر با این مبحث ارتباط برقرار کنید.



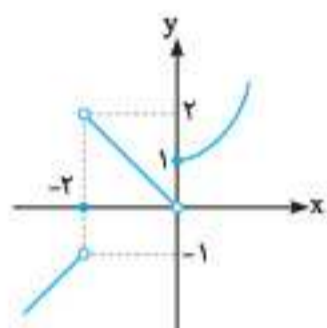
۸۶۱. به ازای کدام مقدار a ، تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} 2x-6 & ; x > 2 \\ x-\sqrt{x+2} & ; x \leq 2 \end{cases}$ بر روی مجموعه اعداد حقیقی، پیوسته است؟ (ریاضی ۹۸)

۱/۵ (۱) ۲ (۲) ۲/۵ (۳) ۳ (۴)

۸۶۲. به ازای مقادیری از a و b ، تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x[x] & ; |x| < 1 \\ ax+b & ; |x| \geq 1 \end{cases}$ بر روی \mathbb{R} پیوسته است. a کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۸)

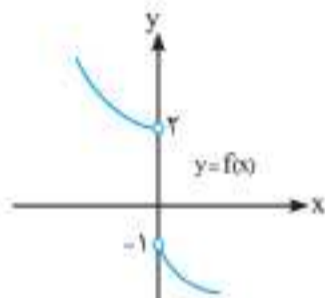
۱/۲ (۱) -۱ (۲) -۱/۲ (۳) ۱/۲ (۴)

برای ۱۰۰ درصد



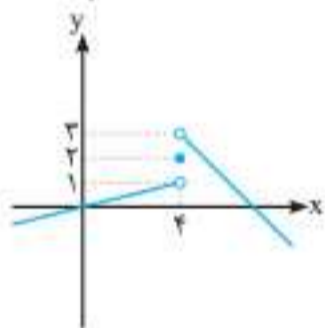
۸۶۳. باتوجه به شکل مقابل، حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(-2-x^2) - \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(1-x^2)$ کدام است؟

- ۱ (۱)
-۱ (۲)
۲ (۳)
-۲ (۴)



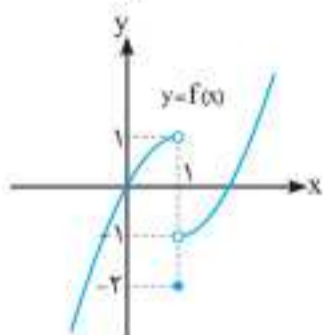
۸۶۴. باتوجه به نمودار $f(x)$ ، حد راست تابع $y = f(x^2 - |x|)$ در نقطه $x = 0$ چقدر از حد چپ آن در این نقطه بیشتر است؟

- صفر (۱)
۳ (۲)
-۳ (۳)
۲ (۴)



۸۶۵. اگر نمودار $y = f(x)$ به صورت مقابل باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} f(-2x^2 + 6x + 1)$ کدام است؟

- ۱ (۱)
۲ (۲)
۳ (۳)
۴ وجود ندارد (۴)



۸۶۶. باتوجه به شکل روبه‌رو، حاصل عبارت $A = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2f^2(x) + 1) + \lim_{x \rightarrow 1^-} f([x])$ کدام است؟

- ۱ (۱)
۴ (۲)
صفر (۳)
۲ (۴)

۸۶۷. تابع $g(x) = \begin{cases} f(x) & ; x > -1 \\ -2x-2 & ; x \leq -1 \end{cases}$ است. اگر تابع درجه دوم f در نقطه $(-1, 0)$ مینیمم داشته باشد و حد چپ و راست g در $x = -1$ برابر باشند، آن‌گاه حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۸۶۸. اگر $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & ; x > 0 \\ x-2 & ; x < 0 \end{cases}$ باشد، آن‌گاه حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} f(x^2 + |x|)$ کدام است؟

- ۲ (۱) ۱ (۲) صفر (۳) وجود ندارد (۴)

۸۶۹. اگر n عددی طبیعی باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)-1}{x}$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) $n+n^2$ (۳) $\frac{n(n+1)}{2}$ (۴)

۸۷۰. اگر n عددی طبیعی باشد. حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^n - n}{x - 1}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{n(n-1)}{2}$ (۲) $\frac{n(n+1)}{2}$ (۳) $\frac{n(n+2)}{2}$ (۴) $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$

۸۷۱. اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2^x + 2^{2-x} - 6}{2^{2-x} + 2^x - 5} = L$ باشد. عدد حقیقی L کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{2}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{2}{4}$

۸۷۲. اگر $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f \cos^2 x + 1 - \cos x - 6}{a \cos x + b} = \frac{7}{2}$ باشد. مقدار $a+b$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) -۴ (۳) ۲ (۴) -۲

۸۷۳. حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{(\sqrt{\sin x} - \sqrt{\sin x})^2}$ کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۱۲ (۳) ۱۴۴ (۴) ۳۶

۸۷۴. تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x^2 \geq 2|x| \\ 2|x| & ; x^2 < 2|x| \end{cases}$ در چند نقطه ناپیوسته است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) هیچ

۸۷۵. مقدار k کدام باشد تا تابع $f(x) = \begin{cases} k & ; x = \pi \\ \frac{\sin x}{\sqrt{1 + \cos x}} & ; x \neq \pi \end{cases}$ در $x = \pi$ پیوستگی راست داشته باشد؟

- (۱) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $-\sqrt{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) $\sqrt{2}$

۸۷۶. تابع $f(x) = [\frac{1}{x}]$ روی بازه $[\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}]$ پیوسته است. حداکثر مقدار n کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{6}$ (۴) $\frac{2}{3}$

آزمون پایانی فصل ششم

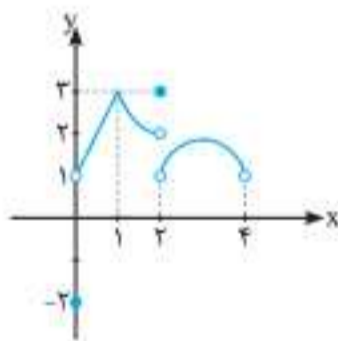


مدت زمان پیشنهادی: ۲۵ دقیقه

۱. برای تابع $f(x) = [x] - x$ در نقطه $a \in \mathbb{Z}$ حد چپ، حد راست و حد به ترتیب دارای چه مقادیری می باشند؟

- (۱) صفر، صفر، صفر
(۲) $-1, -1, -1$
(۳) صفر، -1 ، وجود ندارد.
(۴) -1 ، صفر، وجود ندارد.

۲. نمودار تابع f مطابق شکل روبه‌رو می باشد. مقدار $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) + f(\cdot)$ کدام است؟



- (۱) صفر
(۲) ۱
(۳) ۲
(۴) ۳

۳. اگر $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = k_1$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = k_2$ باشد. آن‌گاه حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x^2 - x) + \lim_{x \rightarrow 0^-} f(1 - x^2)$ کدام است؟

- (۱) $k_1 + k_2$ (۲) $2k_1$ (۳) $2k_2$ (۴) صفر

۴. حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{2n} - 1}{x^n - 1}$ کدام است؟ ($n \in \mathbb{N}$)

- (۱) ۲ (۲) ۶ (۳) صفر (۴) ۹

۵. حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 2x - 1}{x^2 - 1}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{4}{3}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) صفر



Lim



۶. حاصل $\lim_{a \rightarrow 1} \frac{1-a^6}{1-a}$ کدام است؟

- ۳ (۱)
- ۲ (۲)
- ۶ (۳)
- ۸ (۴)

۷. حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-8}{\sqrt{4x+17}-5}$ کدام گزینه است؟

- ۶۰ (۱)
- ۳۰ (۲)
- ۱۵ (۳)
- $\frac{۱۵}{۲}$ (۴)

۸. حاصل $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{|2-x^2-2x|}{2x+\sqrt{x^2+27}}$ کدام گزینه است؟

- $\frac{۸}{۲}$ (۱)
- $-\frac{۸}{۲}$ (۲)
- $\frac{۴}{۲}$ (۳)
- $-\frac{۴}{۲}$ (۴)

۹. به ازای کدام مقدار a تابع $f(x)$ در $x=2$ دارای حد است؟

- $-\frac{۱}{۲}$ (۱)
 - $\frac{۲}{۲}$ (۲)
 - $-\frac{۵}{۲}$ (۳)
 - $-\frac{۵}{۲}$ (۴)
- $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4[x]}{|x-2|} & ; x < 2 \\ ax+1 & ; x > 2 \end{cases}$

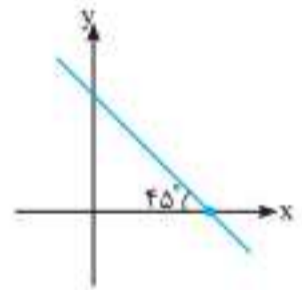
۱۰. اگر $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -1$ و $f(x) = \begin{cases} ax-1 & ; x < 1 \\ x^2+2a & ; x \geq 1 \end{cases}$ باشد، مقدار a کدام است؟

- ۴ (۱)
- ۳ (۲)
- ۲ (۳)
- ۱ (۴)

۱۱. اگر $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{2[1-\frac{1}{\cos^2 x}] + \frac{2x}{\pi}}{ax+b} = \frac{1}{2}$ باشد، حاصل $a-b$ کدام است؟

- $\frac{4+4\pi}{\pi}$ (۱)
- $\frac{4-4\pi}{\pi}$ (۲)
- $\frac{1+\pi}{\pi}$ (۳)
- $\frac{1-\pi}{\pi}$ (۴)

۱۲. نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} ax^2+6x-8 & ; x \neq 2 \\ b & ; x = 2 \end{cases}$ مطابق شکل زیر است. مقدار b کدام است؟



- ۲ (۱)
- ۲ (۲)
- ۶ (۳)
- ۶ (۴)

۱۳. تابع $f(x) = \sqrt{x^2 - (a+2)x + 2a+1}$ روی \mathbb{R} پیوسته است. a باید عضو کدام بازه باشد؟


- $(0, 4)$ (۱)
- $[0, 4]$ (۲)
- $\mathbb{R} - (0, 4)$ (۳)
- $\mathbb{R} - [0, 4]$ (۴)

۱۴. تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2-x-1}{x-1} & ; x > 1 \\ ax-a+2 & ; x \leq 1 \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a در نقطه $x=1$ پیوسته است؟

- فقط $\frac{1}{2}$ (۱)
- فقط ۲ (۲)
- هیچ مقدار a (۳)
- هر مقدار a (۴)

۱۵. تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x+1} & ; |x| > 1 \\ 2x & ; |x| \leq 1 \end{cases}$ از نظر پیوستگی در دو نقطه به طول‌های ۱ و -۱ به ترتیب چگونه است؟

- ناپیوسته - ناپیوسته (۱)
- ناپیوسته - پیوسته (۲)
- پیوسته - ناپیوسته (۳)
- پیوسته - پیوسته (۴)



برای مشاهده پاسخنامه کلیدی آزمون فصل به انتهای کتاب مراجعه نمایید و برای دریافت پاسخنامه تشریحی رمزینه مقابل را با گوشی هوشمند خود اسکن کنید.



پاسخ نامہ تشریحی



حال به تفکیک کسر اول می‌پردازیم:

$$\frac{1}{\cos^f x} - \frac{\cos^2 x}{\cos^f x} = \frac{1}{\cos^f x} - \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^f x} - \frac{1}{\cos^2 x}$$

اگر تساوی فوق را با $\frac{1}{\cos^f x} + \frac{m}{\cos^2 x}$ مقایسه کنیم، $m = -2$ به دست می‌آید.

۵۵۸

می‌دانیم که $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ است: پس:

$$\sqrt{1 + \tan^2 \theta} + \sqrt{1 + 2 \sin \theta \cos \theta} - \sin \theta = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \theta}} + \sqrt{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta} - \sin \theta$$

عبارت زیر رادیکال دوم مربع کامل است:

$$= \frac{1}{|\cos \theta|} + \sqrt{(\sin \theta + \cos \theta)^2} - \sin \theta$$

دقت شود که در ربع اول، تمام نسبت‌های مثلثاتی مثبت هستند، پس می‌توان

قدرمطلق‌ها را حذف کرد: $\frac{1}{|\cos \theta|} + \sqrt{(\sin \theta + \cos \theta)^2} - \sin \theta$

$$= \frac{1}{\cos \theta} + \sin \theta + \cos \theta - \sin \theta$$

$$= \frac{1}{\cos \theta} + \cos \theta = \frac{1}{A} + A = \frac{1+A^2}{A}$$

۵۵۹

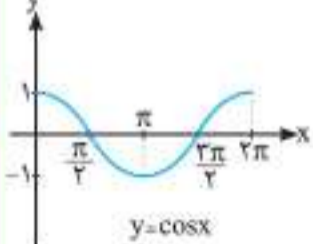
فرض کنیم در مثلث قائم‌الزاویه ABC زاویه A قائمه باشد در نتیجه $\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$ ، یعنی زوایای \hat{B} و \hat{C} متمم هم هستند، پس $\cos \hat{B} = \sin \hat{C}$ و $\sin \hat{B} = \cos \hat{C}$ است. (می‌توانستیم به جای \hat{A} هر کدام از زوایای B یا C را قائمه فرض کنیم.) بنابراین:

$$\frac{\cos^2 \hat{A} + \cos^2 \hat{B} + \cos^2 \hat{C}}{\sin^2 \hat{A} + \sin^2 \hat{B} + \sin^2 \hat{C}} = \frac{\cos^2 90^\circ + \sin^2 \hat{C} + \cos^2 \hat{C}}{\sin^2 90^\circ + \cos^2 \hat{C} + \sin^2 \hat{C}} = \frac{0+1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

۵۶۰

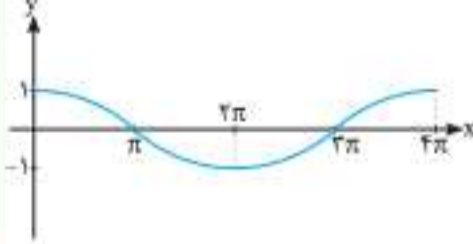
می‌دانیم که در نسبت مثلثاتی کسینوس می‌توان علامت منفی درون کمان را حذف کرد، یعنی $\cos(-x) = \cos x$ در نتیجه منفی درون

کمان را حذف و تابع به فرم $f(x) = 2 \cos(\frac{x}{4})$ تبدیل می‌شود.

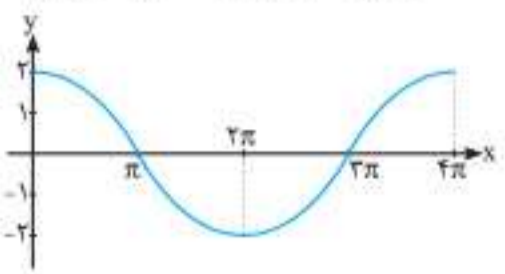


با توجه به این که رفتار x عوضی است، پس با توجه به نمودار $y = \cos x$ مراحل رسم نمودار این تابع به صورت مقابل خواهد بود:

x ها را در دو ضرب می‌کنیم:



چون کسینوس دارای ضریب ۲ است، پس y ها را نیز در ۲ ضرب می‌کنیم:



۵۶۱

تابع نمایی با شرط $a > 1$ همواره صعودی و با شرط $0 < a < 1$ همواره نزولی است، چون با افزایش مقدار x ، مقدار y افزایش می‌یابد: $a > 1$ می‌باشد.

۵۶۲

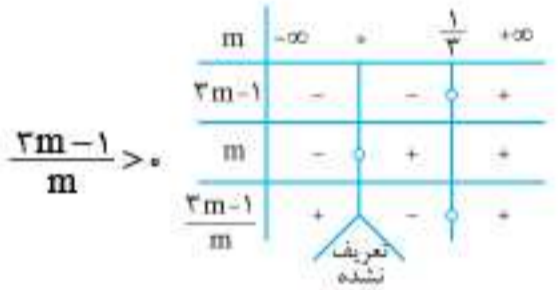
تابع رسم‌شده، یک تابع نمایی است که پایه آن عددی بین صفر و یک

است: بنابراین: $0 < \frac{2m-1}{m} < 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{الف: } \frac{2m-1}{m} > 0 \\ \text{ب: } \frac{2m-1}{m} < 1 \Rightarrow \frac{2m-1}{m} - 1 < 0 \Rightarrow \frac{2m-1-m}{m} < 0 \Rightarrow \frac{m-1}{m} < 0 \end{cases}$$

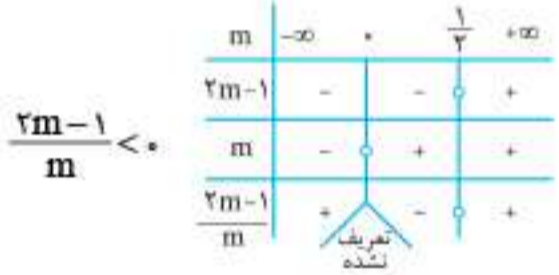
به یاد داشته باشید که در نامعادلات نمی‌توانیم طرفین را در مقداری مجهول ضرب کنیم.

الف:



مجموعه جواب: $(-\infty, 0) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$

ب:



مجموعه جواب: $(\frac{1}{2}, +\infty)$

اشتراک مجموعه جواب‌های الف و ب برابر می‌شود با:

$$(\frac{1}{2}, +\infty) \cap \{(-\infty, 0) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)\} = (\frac{1}{2}, +\infty)$$

۵۶۳

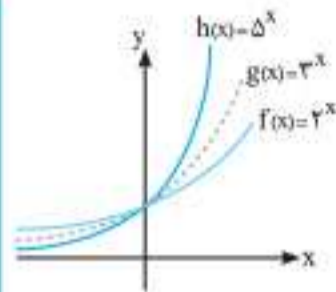
اگر تابع $f(x) = (2a - a^2)^x$ یک تابع نمایی اکیداً صعودی باشد، باید

$$2a - a^2 > 1 \Rightarrow 2a - a^2 - 1 > 0$$

$$\xrightarrow{x(-1)} a^2 - 2a + 1 < 0 \Rightarrow (a-1)^2 < 0$$

چون $(a-1)^2$ توان ۲ دارد پس نمی‌تواند منفی باشد و هیچ مقداری برای a وجود ندارد.

نکته: در تابع $f(x) = a^x$ برای $a > 1$ هر چه عدد بزرگتری باشد نمودار آن در $x < 0$ پایین تر و در $x > 0$ بالاتر می رود.



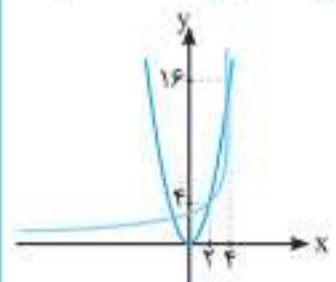
با توجه به آنچه گفته شد در $x < 0$ تابع $h(x) = 5^x$ از همه پایین تر و بالای آن تابع $g(x) = 3^x$ و بالای $g(x) = 3^x$ تابع $f(x) = 2^x$ قرار می گیرد و در $x > 0$ بالاترین نمودار $h(x) = 5^x$ و پایین تر از آن $g(x) = 3^x$ و پایین تر از $g(x) = 3^x$ تابع $f(x) = 2^x$ قرار می گیرد.

با رسم جدول نقاط توابع f و g داریم:

$f(x) = 2^x$	x	-1	0	1	2	3	4	5
	y	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32

$f < g$ $f > g$

$g(x) = x^2$	x	-1	0	1	2	3	4	5
	y	1	0	1	4	9	16	25



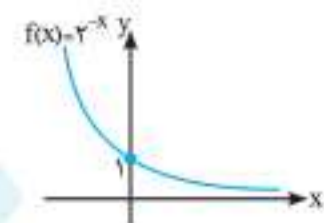
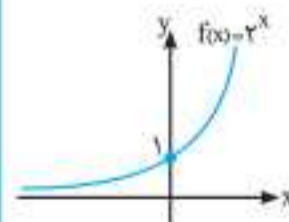
می توان فهمید که در اعداد مثبت بزرگ، 2^x بالای x^2 قرار می گیرد ولی در بازه $(2, 4)$ تابع 2^x زیر تابع x^2 قرار می گیرد.

اگر دو نمودار $f(x) = 3^x$ و $g(x) = (\frac{1}{\sqrt{5}})^x$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنیم می بینیم که در $x < 0$ تابع g بالاتر از f و در $x > 0$ تابع f زیر تابع g قرار می گیرد.

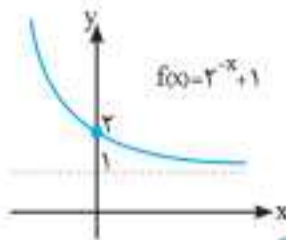
تابع را تا حد ممکن ساده می کنیم:

$$f(x) = \frac{1+2^x}{2^x} = \frac{1}{2^x} + \frac{2^x}{2^x} = \frac{1}{2^x} + 1 = 2^{-x} + 1$$

حال مراحل تکامل تابع را رسم می کنیم:

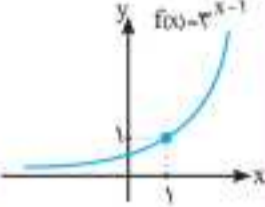
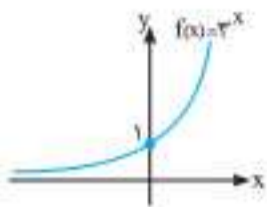


انعکس تابع نسبت به محور عرض ها



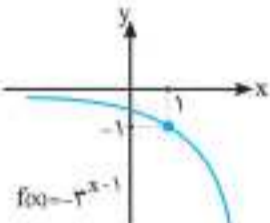
انتقال یک واحدی تابع به سمت بالا

مراحل تکامل تابع را رسم می کنیم:

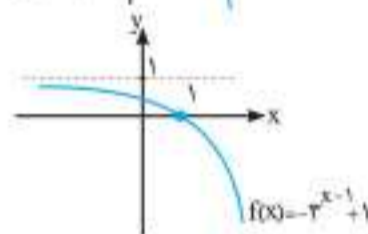


انتقال یک واحدی تابع به سمت راست

انعکس تابع نسبت به محور طول ها



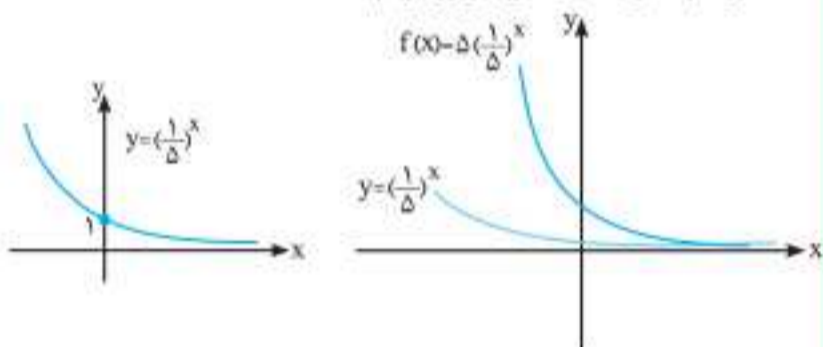
انتقال یک واحدی تابع به سمت بالا



تابع $f(x) = 5^{1-x}$ را ساده می کنیم:

$$f(x) = 5^{1-x} = 5^1 \times 5^{-x} = 5 \times (\frac{1}{5})^x$$

حال به رسم سیر تکامل تابع می پردازیم:

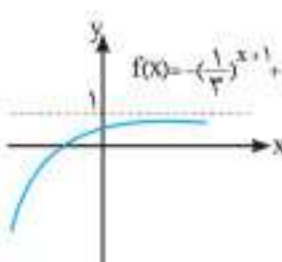
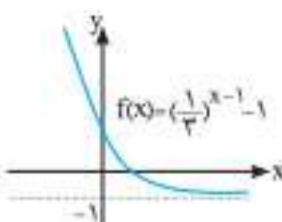


حواست باشه: پس از ضرب 5 در تابع $f(x) = (\frac{1}{5})^x$ تمام

عرض های نقاط منحنی پنج برابر می شوند و در نتیجه از محور طول ها دور می شوند.

نمودار چهار گزینه را به تفکیک رسم می کنیم:

گزینه ۱:



گزینه ۲: